Subject: المحاضرة السادسة

Date: 2/3/2018

تابع:

8. معادلة بسل التفاضلية، وهي من الشكل:

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - v^2) w = 0 \quad ---- \ (1)$$

حيث v لا مقدار ثابت.

إن المعادلة بسل هذه لها نقطتان شاذتان هما:

$z=0$ هي نقطة شاذة نظامية

$z=\infty$ هي نقطة شاذة نظامية. لاحظ ذلك!

وسوف نجد الحلول لهذه المعادلة (معادلة بسل) في جوار النقطة $z=0$ (نقطة شاذة نظامية) كما يلي:

إن حل المعادلة (1) من الشكل: $w = z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ \ldots (A) \ , \ c_0 \neq 0$

نشتق أولاً هذه العلاقة (A) مرتين بالنسبة إلى z ونعوض في المعادلة (1) السابقة (معادلة بسل) فنجد:

$$(A) \Rightarrow w' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n z^{n+m-1}$$

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n z^{n+m-2}$$

وبالتعويض في (1) يكون:

$$(1) \Rightarrow z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n z^{n+m-2} + z \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n z^{n+m-1}$$

$$+ (z^2 - v^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+m} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+m+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+m} = 0$$

ثم يكون بعد ذلك:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+m)(n+m-1) + (n+m) - v^2 \right] c_n z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+m+2} = 0$$

والآن نجعل أمثال أقل قوة لـ z تساوي للصفر (عندما $n=0$) فنحصل على المعادلة الأثرية للمنشق بالشكل: (بعد التقسيم على z^m لطرفي المعادلة الأخيرة)

$$(m(m-1) + m - v^2) c_0 = 0 \ ; \ c_0 \neq 0$$

$$\Downarrow \ m^2 - v^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \mp v}$$ هما الجذران

Subject:
Date:

الآن نعوض في الحد الثاني كل n بـ (n−2) [انتبه للإزاحة]
والآن بالمطابقة والمقارنة نجعل أمثال z^{n+m} مساوياً للصفر
(من أجل n=1 من الحد الأول)

من الحد الأول ① $\Rightarrow ((1+m)m+(1+m)-V^2)C_1=0 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$

من أجل $m=\mp V$

من الحدين ② $\Rightarrow ((n+m)(n+m-1)+(n+m)-V^2)C_n+C_{n-2}=0$

⇓ بالتبسيط

$$((n+m)^2-V^2)C_n+C_{n-2}=0$$

$$[(n+m+V)(n+m-V)]C_n+C_{n-2}=0$$ ⇐ أو كطريقة عربية

ومنه:

$$\boxed{C_n=\frac{-C_{n-2}}{(n+m+V)(n+m-V)}}\ ;\ \forall n\geq 2$$

الدستور التدريجي العام لحساب المعاملات C_n

ومن أجل $m=+V$ نجد الثابت التدريجي الموافق لهذه الحالة
(الفرق بين الجذرين لا ينتمي لـ Z)

$$A \ldots \left[C_n=\frac{-C_{n-2}}{n(n+2V)}\right]\ ;\ \forall n\geq 2\ ;\ C_1=0$$

ومنه يكون حساب المعاملات الأولى:

$$A \Rightarrow n=2 \Rightarrow C_2=\frac{-C_0}{2(2+2V)}$$

$n=3 \Rightarrow C_3=0$ لأن $C_1=0$

$$n=4 \Rightarrow C_4=\frac{-C_2}{4(4+2V)}=\frac{-1}{4(4+2V)}\cdot\frac{-1}{2(2+2V)}C_0$$

وهكذا

NAJJAR Notebook

Subject:
Date:

نلاحظ أن الثوابت ذوات الدليل الزوجي تتعين بدلالة c_0 أما الثوابت ذات الدليل الفردي فهي معدومة ($c_1 = 0$ لأن)

ومنه بالتالي حسب ما سبق:

من أجل n زوجي $\Rightarrow$ $$c_n = \frac{-1}{n(n+2v)} \cdot \frac{-1}{(n-2)(n-2+2v)} \cdot \frac{-1}{(n-4)(n-4+2v)} \cdots \cdot \frac{-1}{2\cdot(2+2v)} c_0$$

الآن نفرض أن $n = 2\lambda$ حيث $\lambda = 1, 2, \ldots$ (للتأكيد n زوجي) فيصبح:

$$c_n = c_{2\lambda} = \frac{-1}{2\lambda(2\lambda+2v)} \cdot \frac{-1}{2(\lambda-1)\,2(\lambda+v-1)} \cdot \frac{-1}{2(\lambda-2)\,2(\lambda+v-2)} \cdots \frac{-1}{2\cdot 2(1+v)} \cdot c_0$$

(حيث عدد الجداءات في العلاقة الأخيرة $\lambda = \frac{n}{2}$)

ويكون أن: $$c_{2\lambda} = (-1)^{\lambda} \frac{v!\, c_0}{4^{\lambda}\lambda!(\lambda+v)!} \quad ; \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

وحيث أن:

$$(\lambda+v)! = (\lambda+v)(\lambda+v-1)\ldots(\lambda+v-\lambda+1)\,v(v-1)\ldots 1$$

($\lambda + v - \lambda + 1 = 1+v$)

وبالتالي عندما $m = +v$ الحل الخاص الموافق للمعادلة $\boxed{1}$ يكون بالشكل:

$$w_1 = z^{v}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} v!\, c_0}{4^{\lambda}\lambda!(\lambda+v)!} z^{2\lambda}$$

الحل من أجل القسم الأول (الموافق لـ $m = +v$)

وملاحظة أن $4^{\lambda} = 2^{2\lambda}$ فالعلاقة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$w_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{v!\, c_0}{\lambda!(\lambda+v)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+v} = J_v\left(\frac{z}{2}\right)$$

وحيث ($c_0 = \frac{1}{2^{v}}$)

$$z^{v}(z)^{2\lambda} = \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+v}$$

Subject:

Date:

وهذا التابع الذي يدعى تابع بسل من المرتبة n ($J_n(\frac{z}{2})$)

وبنفس الطريقة نجد الحل الثاني : $J_{-\nu}(\frac{z}{2})$ (وذلك من أجل $m=-\nu$)

ويكون الحلان $J_{\nu}(\frac{z}{2})$ و $J_{-\nu}(\frac{z}{2})$ مستقلين خطياً

(مشروطاً إذا لم يكن ν عدد صحيحاً أو صفراً)

وبالتالي الحل العام لمعادلة بسل في جوار النقطة الشاذة النظامية $z=0$ هو يكون:

$$w = A J_{\nu}(\frac{z}{2}) + B J_{-\nu}(\frac{z}{2})$$

وحيث A ، B هما ثابتان اختياريان.

9- تمثيل الحلول بتكاملات:

لقد لجأنا إلى تمثيل حلول المعادلات التفاضلية بسلاسل قوى لأنه لا يمكن الوصول إلى حل للمعادلة على شكل تركيب منتهٍ لدوال ابتدائية (أولية). بالإضافة إلى ذلك هناك طريقة أخرى هي التكاملة بالنسبة لوسيط مثل:

$$u(z) = \int_a^b f(z,t)\, dt$$

في هذه الفقرة سنحاول الوصول إلى حلول من هذا النمط للمعادلات التفاضلية ولذا سنبحث عن حلول من الشكل:

$$w = \int_c f(z,\xi)\, d\xi$$

بفرض أن c طريق في المستوي

ولنبدأ بمعادلة يسهل تمثيل حلولها بتكاملات كفقرية من الشكل:

$$(a_n z + b_n) w^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) w' + (a_0 z + b_0) w = 0 \quad \text{(1)}$$

وهي معادلة من المرتبة n حيث أمثال w ومشتقاته هي كثيرات حدود من الدرجة الأولى في z.

وتسمى المعادلة بمعادلة لابلاس التكاملية. ولنبحث لهذه المعادلة عن حل في الشكل:

$$w = \int_c e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi \quad \dots (2)$$

لنبحث عن دالة $p(\xi)$ وطريق c ، بحيث يكون w حلاً للمعادلة (1)

ولنفرض أن $p(\xi)$ و c (مفروضة) ، بحيث يمكن الاشتقاق بالنسبة لـ z تحت رمز التكامل نشتق العلاقة (2) الأخيرة n مرة بالنسبة لـ z ..

Subject:
Date:

وبتبديل المعادلة (٧) نجد:

$(1) \Rightarrow \int_c e^{z\zeta} p(\zeta)[z\,Q(\zeta) + R(\zeta)]\, d\zeta = 0 \quad \dots\dots (3)$

وذلك بفرض أن:

$Q(\zeta) = a_n \zeta^n + \dots\dots + a_1 \zeta + a_0$

$R(\zeta) = b_n \zeta^n + \dots\dots + b_1 \zeta + b_0$

ويكون التكامل في (٤) مشتقاً تاماً:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[e^{z\zeta} S(\zeta)\right] = z e^{z\zeta} S(\zeta) + e^{z\zeta} S'(\zeta)$$

إذا كانت:

$(1) \quad S(\zeta) = p(\zeta) Q(\zeta)$

$(2) \quad S' = p(\zeta) \cdot R(\zeta)$ وبفرض

وعلى هذا الأساس نستطيع حساب $S(\zeta)$ كمايلي:

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} = K_0 + \frac{K_1}{(\zeta - \alpha_1)} + \dots\dots + \frac{K_n}{(\zeta - \alpha_n)}$$ (بتجزيء الكسور)

ونفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ هي جذور $Q(\zeta)$ ذات درجة (١) لا تقل عن درجة $R(\zeta)$

$S' = \frac{dS}{d\zeta} \Rightarrow dS = S' d\zeta$ (توضيح: مشتق K_0 وبمتق $\frac{K_1}{\zeta-\alpha_1}$ هو $\ln(\zeta-\alpha_1)$)

ونعرف أن هذه الجذور مختلفة بأننا نجد (نتيجة المكاملة مباشرة ورفع اللوغاريتم من الطرفين)

$$S(\zeta) = e^{K_0\zeta}(\zeta - \alpha_1)^{K_1} \dots\dots (\zeta - \alpha_n)^{K_n}$$

وبالتالي:

$$(1) \Rightarrow P(\zeta) = \frac{S(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{1}{b_n} \cdot e^{K_0\zeta}(\zeta - \alpha_1)^{K_1 - 1} \dots\dots (\zeta - \alpha_n)^{K_n - 1}$$

(وحيث $Q(\zeta) = b_n(\zeta - \alpha_1) \dots\dots (\zeta - \alpha_n)$)

وبالتالي المعادلة (3) تأخذ الشكل:

$$(3) \rightarrow \int \frac{d}{d\zeta}\left[e^{z\zeta} S(\zeta)\right] d\zeta = \left[e^{z\zeta} S(\zeta)\right]_c \overset{?}{=} 0$$

وهذا يعني أن العلاقة (2) تكون حلاً للمعادلة (1) إذا اخترنا c على نحو يكون فيه

$$[U(\zeta)]_c = \left[e^{z\zeta} S(\zeta)\right]_c = \left[e^{(z+K_0)\zeta}(\zeta - \alpha_1)^{K_1} \dots\dots (\zeta - \alpha_n)^{K_n}\right]_c = 0$$

Subject:

Date:

وتكون العلاقة ② السابقة بعد إيجاد $P(\zeta)$ الناتجة هو الحل المطلوب

ملاحظة 1: اختيار الطريق:

هناك عدة أساليب لاختيار الطريق c يمكن اختيار c طريقاً مغلقاً حيث تعود $U(\zeta)$ إلى قيمتها الابتدائية ويتحقق الشرط: $[U(\zeta)]_c = 0$

وفي هذه الحالة يجب أن يكون داخل c إحدى النقط α_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ كما يمكن اختيار c عقدة مضاعفة كما بالشكل التالي

انظر الرسم

مثال: لتكن لدينا المعادلة:

$$zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0 \quad \ldots ① \quad ; a, b \in R$$

أوجد الحل بالشكل:

$$w = \int e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta \quad \ldots ②$$

الحل: نشتق العلاقة ② المفروضة مرتين بالنسبة لـ z ونعوض في المعادلة ①:

$$② \Rightarrow w' = \int_c \zeta e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta \;,\; w'' = \int \zeta^2 e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta$$

وبالتعويض في ① نجد أن:

$$z \cdot \int_c \zeta^2 e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta + (a+b+z) \int_c \zeta e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta + a \int_c e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بالتبسيط}} \int_c \left[z\zeta^2 + (a+b+z)\zeta + a \right] e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta = 0$$

ومنه نكتب من جديد:

$$\int_c e^{z\zeta} p(\zeta) \left[z(\zeta^2 + \zeta) + (a+b)\zeta + a \right] d\zeta = 0$$

حيث نفرض أن:

$$Q(\zeta) = \zeta^2 + \zeta$$

$$R(\zeta) = (a+b)\zeta + a$$

Subject:
Date:

ونكتب العلاقة بالشكل:

$$\int_c e^{z\zeta} p(\zeta)[z Q(\zeta) + R(\zeta)] = 0 \quad ... \boxed{3}$$

ويكون التكامل في $\boxed{3}$ مشتقاً تاماً:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[e^{z\zeta} S(\zeta)\right]$$

إذا كان: $S(\zeta) = (\zeta^2 + \zeta) P(\zeta) = Q(\zeta) P(\zeta)$

$$S'(\zeta) = [(a+b)\zeta + a] P(\zeta) = R(\zeta) P(\zeta)$$

ومنه يكون:

تفريق الكسور

$$\frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{(a+b)\zeta + a}{(\zeta^2 + \zeta)} \Rightarrow \frac{S'(\zeta)}{S(\zeta)} = \frac{(a+b)\zeta + a}{\zeta(\zeta+1)} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta+1}$$

بالمكاملة بعد فصل المتغيرات:

$$\frac{dS(\zeta)}{S(\zeta)} = \left(\frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta+1}\right) d\zeta \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln S(\zeta) = a \ln \zeta + b \ln(\zeta+1)$$

$$\Rightarrow \ln S(\zeta) = \ln\left[\zeta^a (\zeta+1)^b\right] \xrightarrow[\text{اللوغاريتم}]{\text{نزع}} \boxed{S(\zeta) = \zeta^a (\zeta+1)^b}$$

ومنه:

$$P(\zeta) = \frac{S(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta^a (\zeta+1)^b}{\zeta(\zeta+1)} \Rightarrow \boxed{P(\zeta) = \zeta^{a-1} (\zeta+1)^{b-1}}$$

وعلى هذا فإن الحل في العلاقة $\boxed{2}$ يكون:

$$w = \left[\int_c e^{z\zeta} \zeta^{a-1} (\zeta+1)^{b-1} d\zeta\right]$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

بشرط إذا كان:

$$\left[e^{z\zeta} \zeta^a (\zeta+1)^b\right]_c = 0$$

فإذا فرضنا z على المحور الحقيقي وأن $a > 0$, $b > 0$ فإن المقدار بين القوسين الكبيرين [في العلاقة الأخيرة] ينعدم عندما $\zeta = 0$ و $\zeta = -1$

وإذا كان $z > 0$ فإن هذا المقدار ينعدم من أجل $\zeta = -\infty$.

Subject:

Date:

أما إذا كان $z<0$ فإنه ينعدم من أجل $\zeta=\infty$ وهكذا نصل إلى حلول المعادلة يكفي أن نختار فيها C فترة من المحور الحقيقي وذلك على النحو التالي:

إذا كان $a>0$ ، $b>0$ فيمكن اختيار C الفترة $(-1,0)$

إذا كان $a>0$ ، $z>0$ فيمكن اختيار C الفترة $(-\infty,0)$

أما إذا كان $a<0$ و $b<0$ ، $z>0$ فلا توجد أي قطعة من المحور الحقيقي يمكن اختيارها من الطريق C.

مثال (وظيفة):

أوجد الحل للمعادلة بنفس الطريقة:

$$zw''+(2\nu+1)w'+zw=0$$

حيث ν مقدار ثابت.

ويكون الحل:

$$w=\int_C e^{z\zeta}(\zeta^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,d\zeta$$

بشرط إذا تحقق:

$$\left[e^{z\zeta}(\zeta^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]_C=0$$